

## 7 Cilindros espessos

Considere um cilindro cuja secção tem as dimensões indicadas na Figura 7-1: raio interno  $r_i$ , raio externo  $r_e$  e altura  $h \ll r_i$ . O material do cilindro é homogéneo e isotrópico e segue a lei de Hooke. A pressão interna que atua em  $r_i$  é designada por  $p_i$  e em  $r_e$  atua a pressão externa  $p_e$ . Pretende-se determinar os deslocamentos, tensões e deformações causados por estas pressões (Timoshenko 1934).

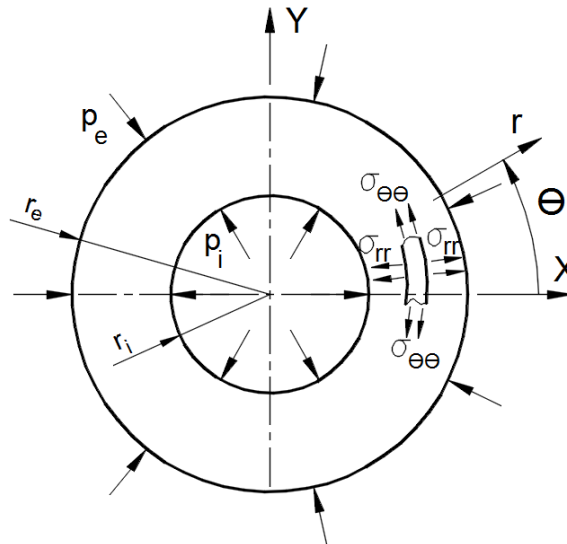


Figura 7-1 – Cilindro com pressão interna e externa.

Para resolver este problema é conveniente utilizar coordenadas cilíndricas. Como o cilindro é fino e não tem solicitações nas bases podemos admitir um estado de tensão plana com  $\sigma_{zz} = \sigma_{zr} = \sigma_{z\theta} = 0$  e todos os outros campos independentes de  $z$ .

A geometria do cilindro, o seu carregamento (as pressões) e o material de que é feito têm simetria axial. Então a solução também tem simetria axial, sendo independente de  $\theta$ .

Analisando as equações de equilíbrio em coordenadas polares verifica-se  $\sigma_{r\theta} = 0$  no cilindro pois nas solicitações na fronteira do cilindro não há tensões de corte aplicadas.

Em conclusão, as únicas componentes do tensor das tensões não nulas são  $\sigma_{rr}$  e  $\sigma_{\theta\theta}$  e dependem apenas da coordenada  $r$ ; as únicas componentes do vetor deslocamento não nulas são  $u_r$  e  $u_z$  e dependem igualmente apenas da coordenada  $r$ , ou seja  $u_r(r)$  (ver-se-á depois que  $u_z$  é constante).

O conjunto de equações (em coordenadas cilíndricas) a resolver é o seguinte:

Equações de equilíbrio

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (7.1)$$

Lei de Hooke (tensão plana)  $\sigma_{rr} = E (\varepsilon_{rr} - \nu \varepsilon_{\theta\theta}) / (1 - \nu^2)$ ,  $\sigma_{\theta\theta} = E (\varepsilon_{\theta\theta} - \nu \varepsilon_{rr}) / (1 - \nu^2)$

Relações deformação-deslocamento

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \qquad (7.2)$$

Substituindo a última equação na penúltima e depois na primeira obtemos a equação diferencial

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0 \qquad (7.3)$$

cuja solução é  $u_r = A_1 r + A_2 / r$   $A_1$  e  $A_2$  são constantes a determinar a partir das condições de fronteira.

Nas superfícies cilíndricas atuam, como se viu, pressões  $p_i$  e  $p_e$ . As condições nas fronteiras  $r_i$  e  $r_e$  são, respetivamente,  $\sigma_{rr} = -p_i$  e  $\sigma_{rr} = -p_e$ .

Escrevendo  $\sigma_{rr}$  em função de  $u_r$  obtém-se um sistema de equações para  $A_1$  e  $A_2$  cuja solução é

$$A_1 = (1 + \nu)(1 - 2\nu) C_1 / E, \qquad C_1 = (p_i r_i^2 - p_e r_e^2) / (r_e^2 - r_i^2)$$

$$A_2 = (1 + \nu) C_2 / E, \qquad C_2 = (p_i - p_e) r_i^2 r_e^2 / (r_e^2 - r_i^2)$$

As tensões são dadas por

$$\sigma_{rr} = C_1 - C_2 / r^2 \qquad (7.4)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_1 + C_2 / r^2 \qquad (7.5)$$

notar que  $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$  é constante no cilindro o que implica  $u_z$  constante.

Vários problemas se podem resolver com os resultados anteriores

- Cilindro maciço. Neste caso  $r_i = 0$  o que implica  $A_2 = C_2 = 0$
- Cilindro só com pressão interna
- Cilindro só com pressão externa
- Cilindros montados com aperto
- Cilindro com condições de fronteira de deslocamento por estar fixo na sua fronteira interna ou externa.

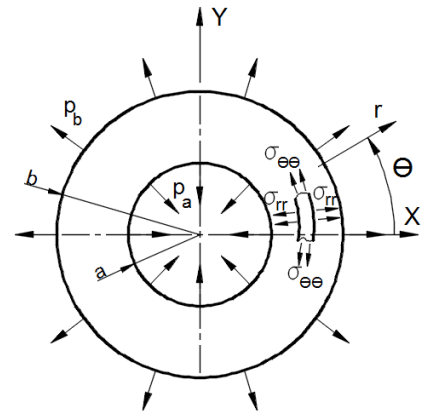
### NOTA IMPORTANTE

Nos exercícios seguintes ter em atenção que a denominação das grandezas está de acordo com as respetivas figuras, não seguindo as expressões acima.

## 7.1 Problemas Resolvidos

### 7.1.1 Exemplo 7.1 - Cilindro longo sob pressão interna e externa

Um cilindro longo está sujeito a pressão interna  $p_a$  e externa  $p_b$ , com as dimensões da figura junta. Obter as equações da solução deste problema em elasticidade.



#### Resolução

Neste problema aplicam-se as seguintes hipóteses:

- A distância entre duas secções transversais permanece constante  $u_z=0$ , deformação plana
- Da simetria do problema, o deslocamento é apenas radial e só depende de  $r$ ,  $u = u_r(r)$   $u_\theta = 0$
- As equações deformação-deslocamento em coordenadas polares (cilíndricas) são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{du_r}{dr} & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_{zz}}{\partial z} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_{zz}}{\partial r} + \frac{du_r}{dz} & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_{zz}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{aligned}$$

que se simplificam neste caso para

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad \gamma_{rz} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0$$

- A Lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos é

$$\sigma_{rr} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{zz} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{zz} \right]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{rr} \right]$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{G} \quad \gamma_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{G} \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\sigma_{z\theta}}{G} \quad \text{onde } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Pelo que a equação de equilíbrio simplificada em coordenadas polares fica:  $\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0$

E após substituição das relações deformação-deslocamento nas relações constitutivas (Lei de Hooke) resulta em

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0$$

Cuja solução tem a forma geral  $u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r}$

As condições de fronteira não aparecem em termos dos deslocamentos ( $u_r$ ), mas em termos das pressões interna e externa, as quais podem ser relacionadas com  $\sigma_{rr}$ :  $\sigma_{rr}(r=a) = p_a$   $\sigma_{rr}(r=b) = p_b$

A solução da equação diferencial anterior é

$$u_r = \frac{(p_b b^2 - p_a a^2)r}{2(b^2 - a^2)(\lambda + G)} + \frac{(p_b - p_a)a^2 b^2}{2(b^2 - a^2)Gr}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(p_b b^2 - p_a a^2)}{(b^2 - a^2)} - \frac{(p_b - p_a)a^2 b^2}{(b^2 - a^2)r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_b b^2 - p_a a^2)}{(b^2 - a^2)} + \frac{(p_b - p_a)a^2 b^2}{(b^2 - a^2)r^2}$$

$$\sigma_{zz} = \left( \frac{\lambda}{\lambda + G} \right) \frac{(p_b b^2 - p_a a^2)}{(b^2 - a^2)} \quad (\text{esta tensão existe porque } \epsilon_{zz}=0)$$

### 7.1.2 Exemplo 7.2 - Montagem de cilindros com aperto

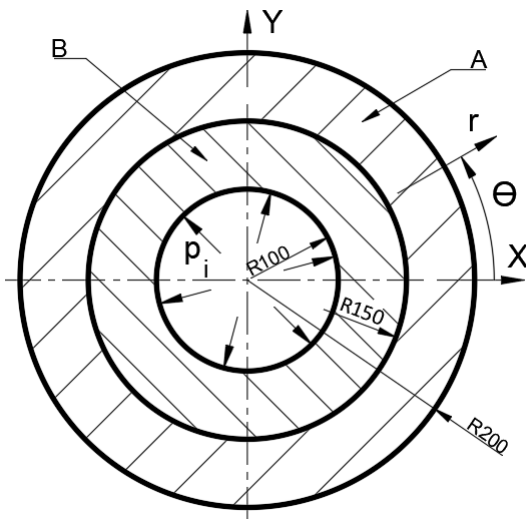


Figura 7-2 – Cilindros com aperto.

Um reservatório de pressão constituído por dois cilindros montados com aperto e feitos do mesmo material (com  $E=207\text{GPa}$ ,  $\nu=0.3$ ) está sujeito a uma pressão interna  $p_i=207\text{MPa}$ , Figura 7-2. A interferência de contacto é de  $0.1\text{mm}$ .

Obter a tensão tangencial e a tensão radial nas três superfícies, e comparar com um cilindro único com parede de espessura igual à soma dos dois anteriores. Desprezar o efeito axial. Representar graficamente o resultado.

#### Resolução

Este problema pode ser resolvido usando as expressões do Exemplo 7.1 (deformação plana). Note que para cada cilindro A e B, são conhecidos todos os valores exceto a pressão de contacto na interface comum (aqui designada como  $p_{\text{contact}}$ ).

$$\sigma_{r_B}(r_i = 100\text{mm}) = -p_i = -207\text{MPa}$$

As condições de fronteira são:

$$\sigma_{r_A}(r_e = 200\text{mm}) = 0$$

$$\sigma_{r_A}(r_0 = 150\text{mm}) = \sigma_{r_B}(r_0 = 150\text{mm}) \equiv p_{\text{contact}}$$

Na superfície da interface, os deslocamentos relativos entre os dois cilindros são

$$u_A - u_B = 0.1\text{mm} \quad (r_0 = 150\text{mm}) \quad (7.6)$$

Nota: uma maneira fácil de verificar esta equação é considerar o cilindro A indeformável (rígido), e a seguir fazer o mesmo com o cilindro B. Facilmente se chega à equação de compatibilidade de deslocamentos, Eq. (7.6).

A partir das equações do Exemplo 7.1, obtemos as equações para os dois cilindros:

$$u_B = \frac{(-p_{\text{contact}}r_0^2 + p_i r_i^2)r}{2(r_0^2 - r_i^2)(\lambda + G)} + \frac{(-p_{\text{contact}} + p_i)r_0^2 r_i^2}{2(r_0^2 - r_i^2)Gr} \quad (r \leq r_0)$$

$$u_A = \frac{(p_{\text{contact}}r_0^2)r}{2(r_e^2 - r_0^2)(\lambda + G)} + \frac{(+p_{\text{contact}})r_0^2 r_e^2}{2(r_e^2 - r_0^2)Gr} \quad (r \geq r_0) \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Substituindo na Eq. (7.6), obtemos a pressão de contacto na interface,  $p_{\text{contact}} = -78.2\text{MPa}$  (negativa por ser de compressão)

Sabendo a pressão de contacto, aplicamos as expressões anteriores para obter os resultados das tabelas seguintes.

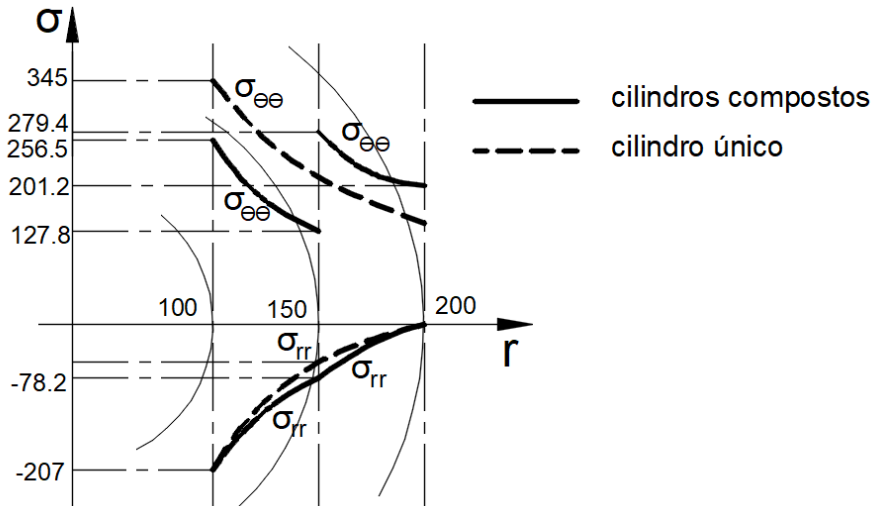
Resultados para os dois cilindros (montagem com aperto):

R=100	$\sigma_{r_B} = -207$	$\sigma_{\theta_B} = 256.5$		
R=150	$\sigma_{r_B} = -78.2$	$\sigma_{\theta_B} = 127.8$	$\sigma_{r_A} = -78.2$	$\sigma_{\theta_A} = 279.4$
R=200	$\sigma_{r_A} = 0$	$\sigma_{\theta_A} = 201.1$		

Caso de cilindro único de espessura de parede igual à soma das espessuras dos cilindros A e B

R=100	$\sigma_r = -207$	$\sigma_{\theta} = 345$
R=150	$\sigma_r = -53.7$	$\sigma_{\theta} = 191.7$
R=200	$\sigma_r = 0$	$\sigma_{\theta} = 138$

Observando graficamente os resultados, podemos ver que a tensão radial  $\sigma_{rr}$  é próxima nos dois casos, mas a tensão tangencial  $\sigma_{\theta\theta}$  é significativamente superior no cilindro único. Assim, pode-se concluir que esta montagem com aperto “alivia” as tensões máximas na estrutura, permitindo assim suportar maiores pressões internas antes de entrar em cedência.



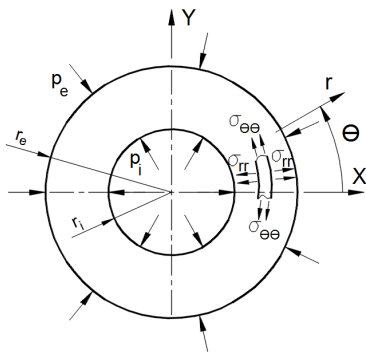
**7.1.3 Exemplo 7.3 – Cilindro espesso com veio interior. (Repescagem 2º Teste 2016/17)**

**Problema 3** (5 valores) Um veio maciço de 50 mm de diâmetro de aço ( $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.3$ ) está montado justo mas sem aperto num cilindro de alumínio ( $E= 70 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.3$ ) com diâmetro exterior de 150 mm. A interferência é nula.

- a) (2.5) Determine as tensões e deslocamentos no veio e no cilindro devido a uma pressão externa de 30 MPa aplicada no cilindro.
- b) (2.5) Determine as tensões e deslocamentos no veio e no cilindro devido a uma pressão externa negativa de -30 MPa aplicada no cilindro.

Resolução

a) as expressões a usar, considerando  $\nu=0.3$  para ambos os materiais, são

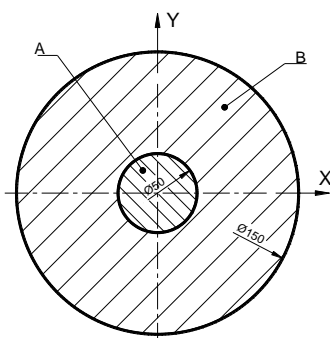


$$u_r = \left( \frac{1-\nu}{E} \right) \frac{(p_i r_i^2 - p_e r_e^2) r}{(r_e^2 - r_i^2)} + \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \frac{(p_i - p_e) r_i^2 r_e^2}{(r_e^2 - r_i^2) r}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(p_i r_i^2 - p_e r_e^2)}{(r_e^2 - r_i^2)} - \frac{(p_i - p_e) r_i^2 r_e^2}{(r_e^2 - r_i^2) r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_i r_i^2 - p_e r_e^2)}{(r_e^2 - r_i^2)} + \frac{(p_i - p_e) r_i^2 r_e^2}{(r_e^2 - r_i^2) r^2}$$

Aplicando a cada um dos cilindros:



Cilindro A:  $r_i=0$ ,  $r_e=25\text{mm}$ ,  $p_i=0$ ,  $p_e=P_{\text{contacto}}$

Cilindro B:  $r_i=25\text{mm}$ ,  $r_e=75\text{mm}$ ,  $p_i=P_{\text{contacto}}$ ,  $p_e=30\text{MPa}$

A equação da compatibilidade de deslocamentos (interferência nula) para  $r=25\text{mm}$ :  $u_B - u_A = 0$ , substituindo os valores:

$$u_{f_b} = \left( \frac{1-0.3}{70 \times 10^3} \right) \frac{(p_{cont} 25^2 - 30 \times 75)(25)}{(75^2 - 25^2)} + \left( \frac{1+0.3}{70 \times 10^3} \right) \frac{(p_{cont} - 30) \times 25^2 \times 75^2}{(75^2 - 25^2)(25)}$$

$$u_{f_A} = \left( \frac{1-0.3}{200 \times 10^3} \right) (-p_{cont})(25)$$

Da equação  $u_{f_b} - u_{f_A} = 0$  obtém-se  $P_{cont}=37.6\text{MPa}$ , e as respetivas tensões e deslocamentos:

$$u_{r_{A(r=25\text{mm})}} = u_{r_{B(r=25\text{mm})}} = -0.0033\text{mm} \quad u_{r_{B(r=75\text{mm})}} = -0.0205\text{mm}$$

$$\sigma_{r_{A(r=25\text{mm})}} = \sigma_{r_{B(r=25\text{mm})}} = -p_{contacto} = -37.6\text{MPa}$$

$$\sigma_{r_{B(r=75\text{mm})}} = -30\text{MPa}$$

$$\sigma_{\theta_{A(r=25\text{mm})}} = -37.6\text{MPa}$$

$$\sigma_{\theta_{B(r=25\text{mm})}} = -20.5\text{MPa} \quad \sigma_{\theta_{B(r=75\text{mm})}} = -28.1\text{MPa}$$

b) neste caso o cilindro “descola” do veio, resultando tensões e deformações nulas no veio:

$$u_{r_{A(r=25\text{mm})}} = 0 \quad \sigma_{r_{A(r=25\text{mm})}} = \sigma_{\theta_{A(r=25\text{mm})}} = 0$$

no cilindro B:  $r_i=25\text{mm}$ ,  $r_e=75\text{mm}$ ,  $p_i=0$   $p_e=-30\text{MPa}$

$$u_{r_{B(r=25\text{mm})}} = \left( \frac{1-0.3}{70 \times 10^3} \right) \frac{(30 \times 75)(25)}{(75^2 - 25^2)} + \left( \frac{1+0.3}{70 \times 10^3} \right) \frac{(+30) \times 25^2 \times 75^2}{(75^2 - 25^2)(25)} = 0.023\text{mm}$$

$$u_{r_{B(r=75\text{mm})}} = \left( \frac{1-0.3}{70 \times 10^3} \right) \frac{(30 \times 75)(75)}{(75^2 - 25^2)} + \left( \frac{1+0.3}{70 \times 10^3} \right) \frac{(+30) \times 25^2 \times 75^2}{(75^2 - 25^2)(75)} = 0.030\text{mm}$$

$$\sigma_{\theta_{B(r=25\text{mm})}} = \frac{(30 \times 75^2)}{(75^2 - 25_i^2)} + \frac{(30)25^2 \times 75^2}{(75^2 - 25^2)25^2} = \frac{135}{2} = 67.5\text{MPa} \quad \sigma_{r_{B(r=25\text{mm})}} = 0$$

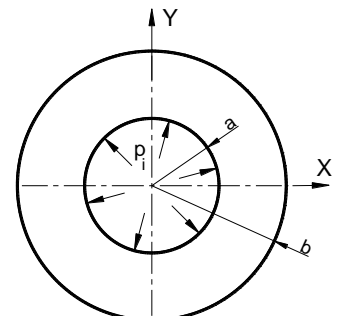
$$\sigma_{\theta_{B(r=75\text{mm})}} = \frac{(30 \times 75^2)}{(75^2 - 25_i^2)} + \frac{(30)25^2 \times 75^2}{(75^2 - 25^2)75^2} = \frac{75}{2} = 37.5\text{MPa} \quad \sigma_{r_{B(r=75\text{mm})}} = 30\text{MPa}$$

### 7.1.4 Exemplo 7.4 – Cilindro espesso com pressão interna e plasticidade.

Considerar o cilindro espesso apenas com pressão interna.

- Obter a distribuição de tensões no regime totalmente plástico.
- A pressão última.

Resolução



a) Para o caso em que apenas existe pressão interna ( $p_i < 0$ , nas equações do Exemplo 7.1), as equações simplificam-se para:

$$u_r = \frac{(-p_i a^2)r}{2(b^2 - a^2)(\lambda + G)} + \frac{(-p_i) a^2 b^2}{2(b^2 - a^2)Gr} \quad \text{em que } \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(p_i a^2)}{(b^2 - a^2)} - \frac{(p_i) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} = \frac{(p_i a^2)}{(b^2 - a^2)} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (\text{negativa} \rightarrow \text{compressão})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_i a^2)}{(b^2 - a^2)} + \frac{(p_i) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} = \frac{(p_i a^2)}{(b^2 - a^2)} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (\text{positiva} \rightarrow \text{tração})$$

Para um material dúctil, a cedência ocorre por limite na tensão de corte (raio do círculo de Mohr):

$$\tau_{\max} \equiv \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{2} = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{2}$$

em que  $\sigma_{\text{yield}}$  é a tensão de cedência obtida num ensaio de tração uniaxial.

Assim, da equação de equilíbrio (ver Eq.(7.1)): 
$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\sigma_{rr}}{dr} - \frac{\sigma_{\text{yield}}}{r} = 0$$

Cuja solução é  $\sigma_{rr} = \sigma_{\text{yield}} \ln r + C$  (onde  $\ln$  é o logaritmo natural)

como  $\sigma_{rr}(r=b) = 0$  (não há pressão exterior),  $C = -\sigma_{\text{yield}} \ln b$ , vem  $\sigma_{rr} = \sigma_{\text{yield}} (\ln r - \ln b) = \sigma_{\text{yield}} \ln \frac{r}{b}$

de  $\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{2}$ , obtemos  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \sigma_{\text{yield}}$

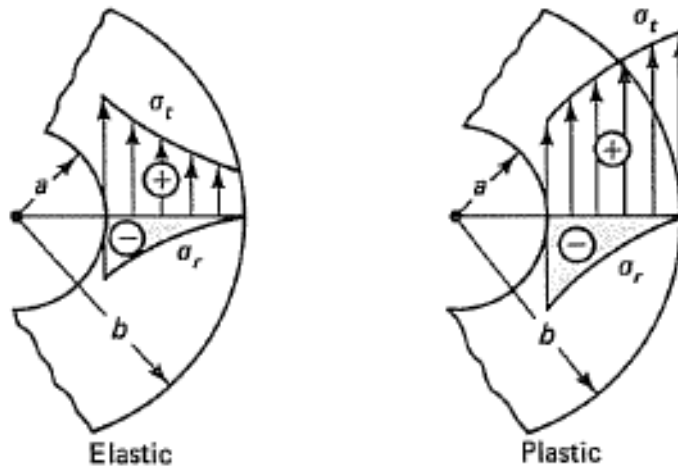
resumindo:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\text{yield}} (\ln r - \ln b) = \sigma_{\text{yield}} \ln \frac{r}{b}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \sigma_{\text{yield}} = \sigma_{\text{yield}} \left( \ln \frac{r}{b} + 1 \right)$$

Graficamente:

$$(\sigma_t \equiv \sigma_{\theta\theta})$$



Note-se que no caso plástico a “diferença” entre as duas curvas é

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_{\text{yield}}$$

b) A pressão máxima ( $p_{\text{ultimate}}$ ) que o cilindro espesso pode suportar, representando plasticidade em toda a espessura de parede, é dada por  $p_{\text{ultimate}} = \sigma_{rr}(r=a) = \sigma_{\text{yield}} \ln \frac{a}{b}$